Lösen von Gleichungen
Teil 2

Berechnung von Polynom-Nullstellen

Die Lösung der „einfachen" Gleichungen $z^n = a$

wird in den Texten 50013, 50014 und 50015 gezeigt.

Datei Nr. 50021

Stand 13. November 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Inhalt von 50021

3 Gleichungen 3. bis 5. Grades

(30) Zeige, dass z = 2 eine Lösung der Gleichung $z^3 - 6z^2 + 28z - 40 = 0$ ist.
Bestimme die restlichen Lösungen.

Zuerst macht man die Probe für z = 2:

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 - 40 = 8 - 24 + 56 - 40 = 64 - 64 = 0$$

Damit weiß man, dass man den Linearfaktor (z-2) abspalten kann.

Dies geht entweder mit Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(z^3 - 6z^2 + 28z - 40) : (z-2) = z^2 - 4z + 20 \\
-(z^3 - 2z^2) \\
\hline
\quad -4z^2 + 28z \\
\quad -(-4z^2 + 8z) \\
\hline
\qquad 20z - 40 \\
\qquad -(20z - 40) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

oder mit dem Horner Schema:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -6 & 28 & -40 \\
z = 2 & \boxed{0} & 2 & -8 & 40 \\
\hline
 & 1 & -4 & 20 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Erg.: $1 \cdot z^2 - 4 \cdot z + 20$

Die 0 in der dritten Zeile beweist, dass z = 2 eine Lösung der Gleichung ist. Wer also mit dem Horner Schema rechnet, benötigt obige Probe nicht.

Ergebnis: $z^3 - 6z^2 + 28z - 40 = \left(z^2 - 4z + 20\right)(z - 2) = 0$

Man muss also nur noch die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 20 = 0$ lösen.

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 80}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{2 \,;\, 2 + 4i \,;\, 2 - 4i\}$

(46) Bestimme alle Lösungen von $z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i = 0$,
wenn man weiß, dass $z_1 = \sqrt{i}$ Lösung der Gleichung ist.

Lösung:

Vermutung: Mit $z_1 = \sqrt{i}$ ist auch $z_2 = -\sqrt{i}$ eine Lösung.

Das beweist man, indem man durch $\left(z^2 - i\right)$ dividiert:

$$
\begin{array}{l}
\left(z^5 - iz^3 + 8z^3 - 8i\right) : \left(z^2 - i\right) = z^3 + 8 \\
-\left(z^5 - iz^3\right) \\
\hline
\quad 0 \quad + 8z^3 - 8i \\
\qquad -\left(8z^3 - 8i\right) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Ergebnis: $z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i = \left(z^2 - i\right)\left(z^3 + 8\right)$

Weil die Division ohne Rest aufgeht, sind $z_{1,2} = \pm\sqrt{i}$ Lösungen.

(1) **Normalform** von $z_{1,2} = \pm\sqrt{i}$.

Es sei a = i. Betrag: $|i| = 1$, Argument: $\alpha = 90^\circ$

Polardarstellung: $a = i = 1 \cdot E\left(90^\circ + k \cdot 360^\circ\right)$

Lösungsansatz: $z = r \cdot E(\varphi)$ $\quad z^2 = r^2 \cdot E(2\varphi)$

Vergleichen: $r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$

$2\varphi = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$

$\varphi = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$

Lösungsformel: $z_k = E\left(45^\circ + k \cdot 180^\circ\right)$ für k = 0 oder 1.

Also: $z_0 = E\left(45^\circ\right) = \cos\left(45^\circ\right) + i \cdot \sin\left(45^\circ\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$z_1 = -z_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(2) Lösungen von $z^3 + 8 = 0$, also von $z^3 = -8$.

Polardarstellung von a = -8: $a = 8 \cdot E\left(180^\circ + k \cdot 360^\circ\right)$

Lösungsansatz $z = r \cdot E(\varphi)$ $\quad z^3 = r^3 \cdot E(3\varphi)$

Vergleichen ergibt: $r^3 = 8 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2$

und $3\varphi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$

$\varphi_k = \dfrac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} = 60^\circ + k \cdot 120^\circ \qquad (k = 0, 1, 2)$

Lösungsformel: $z_k = 2 \cdot \left(\cos(60^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ + k \cdot 120^\circ)\right) \qquad (k = 0, 1, 2)$

Lösungen: $z_0 = 2 \cdot \left(\cos\left(60^\circ\right) + i \cdot \sin\left(60^\circ\right)\right) = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}$

$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\left(180^\circ\right) + i \cdot \sin\left(180^\circ\right)\right) = 2 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -2$

$z_2 = 2 \cdot \left(\cos\left(300^\circ\right) + i \cdot \sin\left(300^\circ\right)\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{2} + i\sqrt{3},\ -2,\ 1 - i\sqrt{3}\right\}$

Aufgaben Übersicht

Bestimme die Lösungsmengen

Aufgabe 1

a) $z^2 - 6z + 12 = 0$

b) $z^2 - 5z + \frac{125}{4} = 0$

c) $z^2 - iz + 12 = 0$

d) $iz^2 + 4z - 4i = 0$

e) $z^2 + (2 + i \cdot 4)z + (-3 + i \cdot 3) = 0$

f) $z^2 + (4 + i \cdot 2)z + (4 + i \cdot 4) = 0$

g) $z^2 - i \cdot 4z - (4 + i) = 0$

h) $i \cdot z^2 + (4 - 2i)z - (4 + 3i) = 0$

i) $z^2 + 2iz - k = 0$ Nur imag. Lsg!

j) $6iz^2 - 5(1 + 2i)z + 17 = 0$

Aufgabe 2

a) $z^4 + (1 - i)z^2 - i = 0$

b) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

c) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

d) $z^4 + i \cdot 13z^2 - 36 = 0$

Aufgabe 3

a) $z^3 - 4z^2 + 13z + 50 = 0$ hat eine ganzzahlige reelle Lösung.

b) $z^3 - (7 + 2i)z^2 + (28 + 10i)z - (8 + 56i) = 0$ Zeige: $z_1 = 2i$ ist eine Lösung.

c) $z^4 - 10z^3 + 66z^2 - 226z + 377 = 0$ Zeige: $z_1 = 3 - 2i$ ist eine Lösung.

d) $z^4 - 2\sqrt{2}z^3 + 4z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$ Zeige: $z_1 = -i$ ist eine Lösung.

e) $z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 15 = 0$ Zeige. $z_1 = 2 - i$ ist eine Lösung.

Lösungen Aufgabe 1

auf CD.