

Lösen von Gleichungen  
Teil 2

Berechnung von Polynom-Nullstellen

Die Lösung der „einfachen“ Gleichungen  $z^2 = a$   
wird in den Texten 50013, 50014 und 50015 gezeigt.

† Datei Nr. 50021

Stand 13. November 2023

**FRIEDRICH W. BUCKEL**

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK  
UND STUDIUM

<https://mathe-cd.de>

## Inhalt von 50021

<b>1</b>	<b>Quadratische Gleichungen</b>	<b>4</b>
1.1	mit reellen Koeffizienten	4
	(1) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (2) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ (3) $3x^2 - 2x + 1 = 0$	
1.2	mit komplexen Koeffizienten und reellem aber negativen Radikanden	5
	(4) $z^2 - i \cdot 3z + 4 = 0$ (5) $z^2 - 10i \cdot z - 29 = 0$ (6) $z^2 - 10i \cdot z - 29 = 0$	
	(6) $iz^2 + 6z - 25i = 0$ (7) $\frac{1}{2}i \cdot z^2 - 9z - 41 \cdot i = 0$ (8) $4z^2 - 4\bar{z} + 1 = 0$	
1.3	mit komplexen Koeffizienten und nicht-reellem Radikanden	7
	(9) $z^2 + 2z + \frac{3}{4}i = 0$ (10) $z^2 - i\sqrt{5} \cdot z - 3i = 0$	
	Allgemein Lösung von $az^2 + bz + c = 0$ mit komplexer Wurzel	9
	Beispiele zur Lösungsformel (9), (10) und (11) $z^2 + 2z - 3 = 0$	10
	(12) $i \cdot z^2 + 3z - 2 = 0$ Ausführliche Lösung und Kurzlösung	11
	(13) $z^2 + (2 - i) \cdot z - 2i = 0$	12
1.4	Spezielle Quadratische Gleichungen	
	(14) $z^2 + i \cdot 2z - (1 + i) = 0$ und	
	(15) $z^2 + (2 + 2i) \cdot z + 3i = 0$ (16) $(1 + 2i) \cdot z^2 - (3 - i) \cdot z = 0$	13
	<b>Aufgabe 1 (Lösungen auf Seite 27)</b>	13
	a) $z^2 - 6z + 12 = 0$ b) $z^2 - 5z + \frac{125}{4} = 0$	
	c) $z^2 - iz + 12 = 0$ d) $iz^2 + 4z - 4i = 0$	
	e) $z^2 + (2 + i \cdot 4)z + (-3 \cdot i \cdot 3) = 0$ f) $z^2 + (4 + i \cdot 2)z + (4 + i \cdot 4) = 0$	
	g) $z^2 - i \cdot 4z - (4 + i) = 0$ h) $i \cdot z^2 + (4 - 2i)z - (4 + 3i) = 0$	
	i) $z^2 + 2iz - k = 0$ Für welches $k \neq 0$ hat die Gleichung nur imaginäre Lösungen?	
	j) $6iz^2 - 5(1 + 2i)z + 17 = 0$	
<b>2</b>	<b>Biquadratische Gleichungen</b>	<b>14/17</b>
	(20) $z^4 + (1 + i) \cdot z^2 + i = 0$ (21) $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$	
	(22) $z^4 + (2i + 2)z^2 + 4i = 0$	16 und 17
	<b>Aufgabe 2 (Lösungen auf Seite 28)</b>	15
	a) $z^4 + (1 - i)z^2 - i = 0$ b) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$ c) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$	
	d) $z^4 + i \cdot 13z^2 - 36 = 0$ e) $z^4 - iz^2 + 2 = 0$ f) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$	

## 3 Gleichungen 3. bis 5. Grades

(30)	$z^3 - 6z^2 + 28z - 40 = 0$	18
(31)	$z^3 - (7+i)z^2 + (12+7i)z - 12i = 0$	18
(32)	$z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 15 = 0$	19
(33)	$z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10 = 0$	20
(34)	$z^5 - 5z^4 + 13z^3 - 7z^2 - 8z + 18 = 0$	21

**Aufgabe 3** mit Lösungen (S. 30 ff)

a)	$z^3 - 4z^2 + 13z + 50 = 0$	hat eine ganzzahlige reelle Lösung.
b)	$z^3 - (7+2i)z^2 + (28+10i)z - (8+56i) = 0$	Zeige: $z_1 = 2i$ ist eine Lösung.
c)	$z^4 - 10z^3 + 66z^2 - 226z + 377 = 0$	Zeige: $z_1 = 3 - 2i$ ist eine Lösung.
d)	$z^4 - 2\sqrt{2}z^3 + 4z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$	Zeige: $z_1 = -i$ ist eine Lösung.
e)	$z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 15 = 0$	Zeige: $z_1 = 2 - i$ ist eine Lösung.
f)	$f(z) = z^3 - 4iz^2 + (i-6)z + (3i+1)$	Zeige, dass $i$ eine Nullstelle von $f$ ist.

4	Fundamentalsatz der Algebra	22	
(40)	$x^2 + x - 6 = 0$	(41) $4x^2 + 4x - 3 = 0$	22
(42)	$x^2 + 2x + 2 = 0$		22
(43)	$z^5 - 5z^4 + 13z^3 - 7z^2 - 8z + 18 = 0$		23
(44)	$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$	(45) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$	24
(46)	$z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i = 0$		25
	Übersicht zu den Aufgaben 1 bis 3		26
	Lösungen der Aufgaben 1 bis 3		27-32

### 3 Gleichungen 3. bis 5. Grades

- (30) Zeige, dass  $z = 2$  eine Lösung der Gleichung  $z^3 - 6z^2 + 28z - 40 = 0$  ist.  
Bestimme die restlichen Lösungen.

Zuerst macht man die Probe für  $z = 2$ :

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 - 40 = 8 - 24 + 56 - 40 = 64 - 64 = 0$$

Damit weiß man, dass man den Linearfaktor  $(z-2)$  abspalten kann.

Dies geht entweder mit

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (z^3 - 6z^2 + 28z - 40) : (z - 2) = z^2 - 4z + 20 \\ -(z^3 - 2z^2) \\ \hline -4z^2 + 28z \\ -(-4z^2 + 8z) \\ \hline 20z - 40 \\ -(20z - 40) \\ \hline 0 \end{array}$$

oder mit dem

Horner Schema:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 28 & -40 \\ z=2 & \boxed{0} & & & \\ \hline & & -4 & 20 & \boxed{0} \end{array}$$

Erg.:  $1 \cdot z^2 - 4 \cdot z + 20$

Die 0 in der dritten Zeile beweist, dass  $z = 2$  eine Lösung der Gleichung ist. Wer also mit dem Horner Schema rechnet, benötigt obige Probe nicht.

Ergebnis:  $z^3 - 6z^2 + 28z - 40 = (z^2 - 4z + 20)(z - 2) = 0$

Man muss also nur noch die quadratische Gleichung  $z^2 - 4z + 20 = 0$  lösen.

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 80}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i$$

Lösungsmenge:  $\mathbb{L} = \{2; 2 + 4i; 2 - 4i\}$

- (46) Bestimme alle Lösungen von  $z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i = 0$ ,  
wenn man weiß, dass  $z_1 = \sqrt{i}$  Lösung der Gleichung ist.

**Lösung:**

Vermutung: Mit  $z_1 = \sqrt{i}$  ist auch  $z_2 = -\sqrt{i}$  eine Lösung.

Das beweist man, indem man durch  $(z^2 - i)$  dividiert:

$$\begin{array}{r} (z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i) : (z^2 - i) = z^3 + 8 \\ -(z^5 - iz^3) \\ \hline 0 + 8z^2 - 8i \\ -(8z^2 - 8i) \\ \hline 0 \end{array}$$

Ergebnis:  $z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i = (z^2 - i)(z^3 + 8)$

Weil die Division ohne Rest aufgeht, sind  $z_{1,2} = \pm\sqrt{i}$  Lösungen.

- (1) **Normalform** von  $z_{1,2} = \pm\sqrt{i}$ .

Es sei  $a = i$ . Betrag:  $|i| = 1$ , Argument:  $\alpha = 90^\circ$

Polardarstellung:

Lösungsansatz:  $z = r \cdot E(\varphi)$

Vergleichen:

$$\begin{array}{l} a = i = 1 \cdot E(90^\circ + k \cdot 360^\circ) \\ z^2 = r^2 \cdot E(2\varphi) \\ \hline r^2 = 1 \Rightarrow r = 1 \\ 2\varphi = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \\ \varphi = 45^\circ + k \cdot 180^\circ \end{array}$$

Lösungsformel:

$$z_k = E(45^\circ + k \cdot 180^\circ) \quad \text{für } k = 0 \text{ oder } 1.$$

Also:

$$z = E(45^\circ) = \cos(45^\circ) + i \cdot \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$z_1 = -z_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

- (2) Lösungen von  $z^3 + 8 = 0$ , also von  $z^3 = -8$ .

Polardarstellung von  $a = -8$ :

Lösungsansatz  $z = r \cdot E(\varphi)$

Vergleichen ergibt:

und

$$a = 8 \cdot E(180^\circ + k \cdot 360^\circ)$$

$$z^3 = r^3 \cdot E(3\varphi)$$

$$r^3 = 8 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$3\varphi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\varphi_k = \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} = 60^\circ + k \cdot 120^\circ \quad (k = 0, 1, 2)$$

Lösungsformel:

$$z_k = 2 \cdot (\cos(60^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ + k \cdot 120^\circ)) \quad (k = 0, 1, 2)$$

Lösungen:

$$z_0 = 2 \cdot (\cos(60^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ)) = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}$$

$$z_1 = 2 \cdot (\cos(180^\circ) + i \cdot \sin(180^\circ)) = 2 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -2$$

$$z_2 = 2 \cdot (\cos(300^\circ) + i \cdot \sin(300^\circ)) = 2 \cdot (\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1 - i\sqrt{3}$$

Lösungsmenge:  $\mathbb{L} = \{\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}\}$

## Aufgaben Übersicht

Bestimme die Lösungsmengen

### Aufgabe 1

- |  |   |
|--|---|
| a) $z^2 - 6z + 12 = 0$                         | b) $z^2 - 5z + \frac{125}{4} = 0$             |
| c) $z^2 - iz + 12 = 0$                         | d) $iz^2 + 4z - 4i = 0$                       |
| e) $z^2 + (2+i \cdot 4)z + (-3+i \cdot 3) = 0$ | f) $z^2 + (4+i \cdot 2)z + (4+i \cdot 4) = 0$ |
| g) $z^2 - i \cdot 4z - (4+i) = 0$              | h) $i \cdot z^2 + (4-2i)z - (4+3i) = 0$       |
| i) $z^2 + 2iz - k = 0$ Nur imag. Lsg!          | j) $6iz^2 - 5(1+2i)z + 17 = 0$                |

### Aufgabe 2

- |                             |                                   |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| a) $z^4 + (1-i)z^2 - i = 0$ | b) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$           |
| c) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$   | d) $z^4 + i \cdot 13z^2 - 36 = 0$ |

### Aufgabe 3

- |   |  |
|---|--|
| a) $z^3 - 4z^2 + 13z + 50 = 0$                      | hat eine ganzzahlige reelle Lösung.    |
| b) $z^3 - (7+2i)z^2 + (28+10i)z - (8+56i) = 0$      | Zeige: $z_1 = 2i$ ist eine Lösung.     |
| c) $z^4 - 10z^3 + 66z^2 - 226z + 377 = 0$           | Zeige: $z_1 = 3 - 2i$ ist eine Lösung. |
| d) $z^4 - 2\sqrt{2}z^3 + 4z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$ | Zeige: $z_1 = -i$ ist eine Lösung.     |
| e) $z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 15 = 0$              | Zeige: $z_1 = 2 - i$ ist eine Lösung.  |

## Lösungen Aufgabe 1

auf CD.

Demo-Text für [www.mathe-cd.de](http://www.mathe-cd.de)